Übungsstunde 9:

Themen:

- QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt
- Modifizierter Gram-Schmidt
- Matrixnorm
- Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate
  - ↳ Normalengleichung
  - ↳ QR-Zerlegung
- Determinante

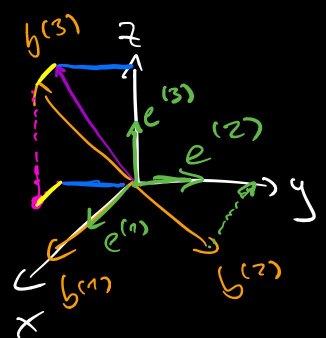
QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$

$$n\left\{\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & v_3, & \dots, & v_k \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}}_{k}}^{A}\right. = n\left\{\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{k}}^{Q}\right. \cdot \left.\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1^T\underline{v}_1 & \underline{q}_1^T\underline{v}_2 & \dots & \underline{q}_1^T\underline{v}_k \\ 0 & \underline{q}_2^T\underline{v}_2 & & \underline{q}_2^T\underline{v}_k \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \underline{q}_k^T\underline{v}_k \end{bmatrix}}_{k}}^{R}\right\}k$$

Orthonormale Basis

Koeff. aus dem Verfahren

Modifizierter Gram-Schmidt Algo:



Pseudocode:

Für $j = 1, 2, 3, \dots, n$
- $V = V_j$ $\quad j = 2$
- Für $i = 1, 2, \dots, j-1$
  - $r_{ij} = \langle q_i, v \rangle$
  - $v = v - r_{ij} q_i$
- $r_{jj} = \|v\|$
- $q_j = \dfrac{v}{r_{jj}}$

Normalerweise:

(i) $e^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)}$

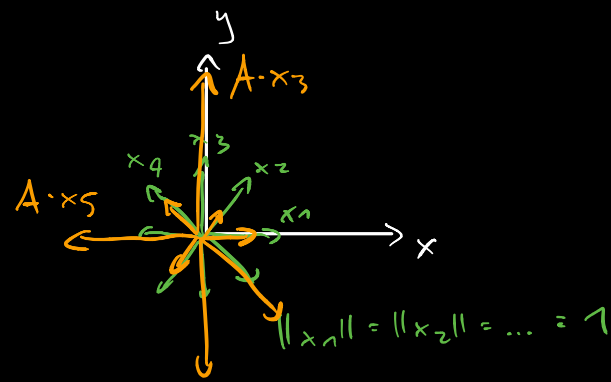
$\Rightarrow e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$

$e^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

Matrixnorm:

$$\|\underline{\underline{A}}\| = \max_{\|\underline{x}\|=1} \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|$$



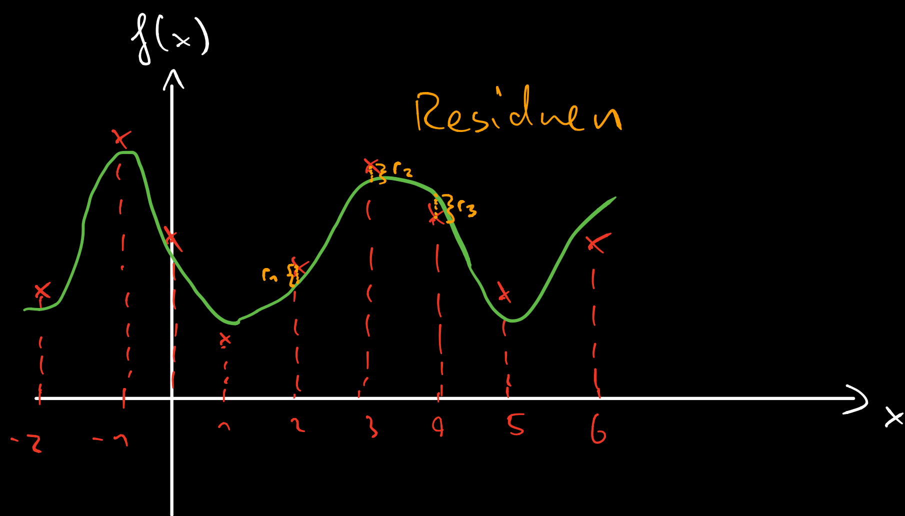
Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate:

- Normalengleichungen → Handrechnungen
- QR-Zerlegung → Computer

} Betrachten wir heute

- Singulärwertzerlegung (SVD) → später, Profi-Software

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$



Problem:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\underline{r}\|_2 = \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c}\|_2 = \sqrt[2]{r_1^{2} + r_2^{2} + \dots + r_n^{2}} \quad \text{minimieren!}$$

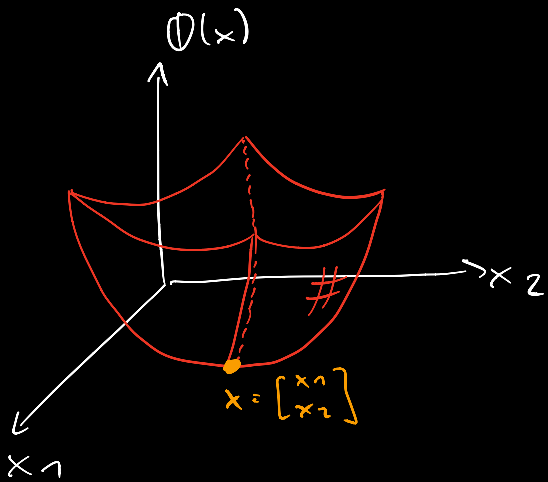
Methode der kleinsten Quadrate

Normalengleichung: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$ nicht perfekt lösbar → unendlich viele Lösungen?

Lösen stattdessen $\boxed{\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}}$

Beweisidee: x sei die Lösung des Ausgleichswertproblem

$$\Phi(x) := \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c}\|_2^2 = \langle \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c}, \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} \rangle_2 \leq \|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{c}\|_2^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$



$$\Phi_z : \quad t \mapsto \Phi_z(t) := \|\underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) - c\|_2^2 \qquad \begin{matrix} \underline{z} \neq 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\Phi_z(t) = \langle \underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) - c, \underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) - c \rangle$$

$$= [\underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) - c]^T [\underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z})]$$

$$= t^2(z^T A^T A z) + \boxed{2t(z^T A^T A x - z^T A^T c)} + \underbrace{(x^T A^T A x + c^T c - 2x^T A^T c)}_{\text{Minimaler Fehler = Residuum}}$$

Möchten, dass das Minimum bei $t=0$ liegt $\Leftrightarrow \Phi_z'(t=0) = 0$

$$\Phi_z'(0) \overset{!}{=} 0 = 2(z^T A^T A x - z^T A^T c) = 2\underline{z}^T(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{\underline{A}}^T \underline{c})$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \overset{!}{=} \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$$

Beispiel 9.1:

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	1	3	4

$$f(-1) = 0 = a - b + c$$
$$f(0) = 1 = c$$
$$f(1) = 3 = a + b + c$$
$$f(2) = 4 = 4a + 2b + c$$

Hypothese: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$
$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\text{Gauss}}}$$

Ausgleichsrechn. mit QR:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r}$$ Risiduen minimieren

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{Q}}$ orth. quad. $\to \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{R}}_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, R_0 ist eine quadratische rechte obere Dreiecksmatrix

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c} \qquad | \, \underline{\underline{Q}}^T \cdot$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{c} = \underline{d}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{R}}_0 \cdot \underline{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_0 \\ \underline{d}_1 \end{bmatrix}$$

$\to$ lösen $\underline{\underline{R}}_0 \cdot \underline{x} = \underline{d}_0$, $\underline{r} = \underline{d}_1$ unsere Residuen!

Beispiel 9.2:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 1 &= r_1 \\ x_2 - 3 &= r_2 \quad \iff \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r} \\ x_2 - 4 &= r_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$:

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \underset{=0}{\boxed{1}} \end{bmatrix}}_{2} \Big\}3 \qquad \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos\varphi + \sin\varphi \\ 0 & \underbrace{\boxed{\cos\varphi - \sin\varphi}}_{=0} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi = 45°$$

$$\Rightarrow \quad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}^T, \qquad \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} R_0 \\ 0 \quad 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{R_0}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{d}$:

$$\underline{\underline{Q}}^T \underline{c} = \underline{\underline{G}}\, \underline{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R}} \cdot \underline{x} = \underline{d} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} d_0 \\ \\ d_1 \end{matrix} \qquad r = d_1 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_0}}\, \underline{x} = \underline{d_0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \frac{7}{2}, \quad x_1 = 1 - x_2 = \underline{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}}}$$

$\underline{\underline{QR}}$ mit Gramm-Schmidt:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\\0 & \underset{=0}{\boxed{1}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & q_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

i) $e_1 = \underline{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}} = q_1$ (bereits Norm 1)

ii) $$e_2' = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \overset{q_2^T}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}^T} \overset{e_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & *\\0 & 1/\sqrt{2} & *\\0 & 1/\sqrt{2} & *\end{bmatrix} \qquad A = Q \cdot R$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & \sqrt{2}\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}q_1^T e_1 & q_2^T e_1\\0 & q_2^T e_2\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{d} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{c} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ \boxed{* \quad * \quad *}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\7/\sqrt{2}\\ *\end{bmatrix} \begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right\} d_0\\ \left.\vphantom{1}\right\} d_1\end{matrix}$$

unnötig, bestimmt nur das Residuum

$\Rightarrow$ kriegen diesselbe Lösung

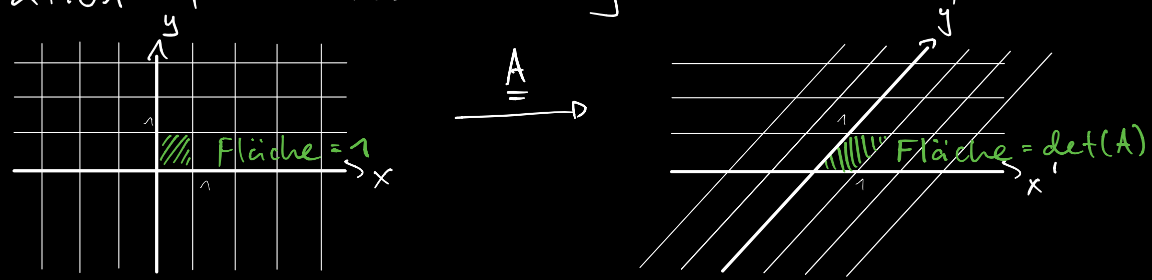
Determinante:

$$\det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{A}} \mapsto \det(\underline{\underline{A}})$$

Bildet jede $n\times n$ Matrix auf eine reelle Zahl ab

⚠ Nicht definiert für nicht-quadratische Matrizen (ausser Gram'sche Determinante, wird in Analysis II behandelt)

Interpretation: Flächenveränderung durch die Matrix



Berechnungsmethoden:

2×2 - Matrizen:

3×3 - Matrizen: Regel von Sarrus:

Laplac'sche Entwicklungssatz: